Übungsstunde 5:

Themen:

- Basis in Vektorräumen
- Basen von linearen Abbildungen (Kern & Bild)
- Allgemeine Lösung eines LGS $\Leftrightarrow$ Link zu DGL

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

a) $\underline{\underline{A}}^{-1}$

b) $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b}$

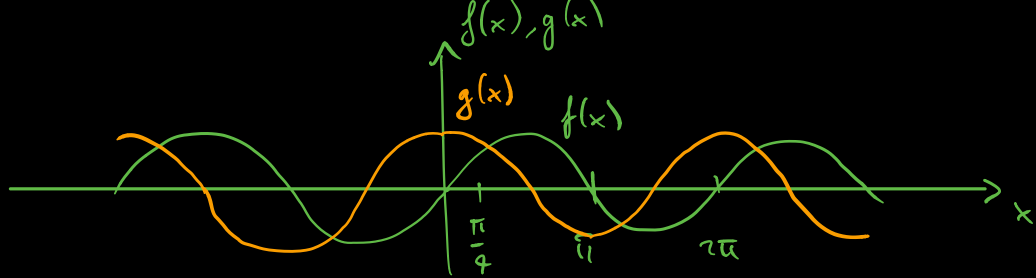
Basis in Funktionsräumen:

Frage: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$

$\boxed{a \cdot \sin(x) + b\cos(x) = 0}$ $a, b \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$



$$\left.\begin{aligned} x = \tfrac{\pi}{2}: \quad & a = 0 \\ x = \pi: \quad & -b = 0 \end{aligned}\right\}$$ Nur die triviale Lösung $\Rightarrow$ lin. unabh.

Frage: $f(x) = \sin(x+2)$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \cos(x)$

$$\sin(x+2) = \sin(x)\underbrace{\cos(2)}_{a} + \underbrace{\sin(2)}_{b} \cdot \cos(x)$$

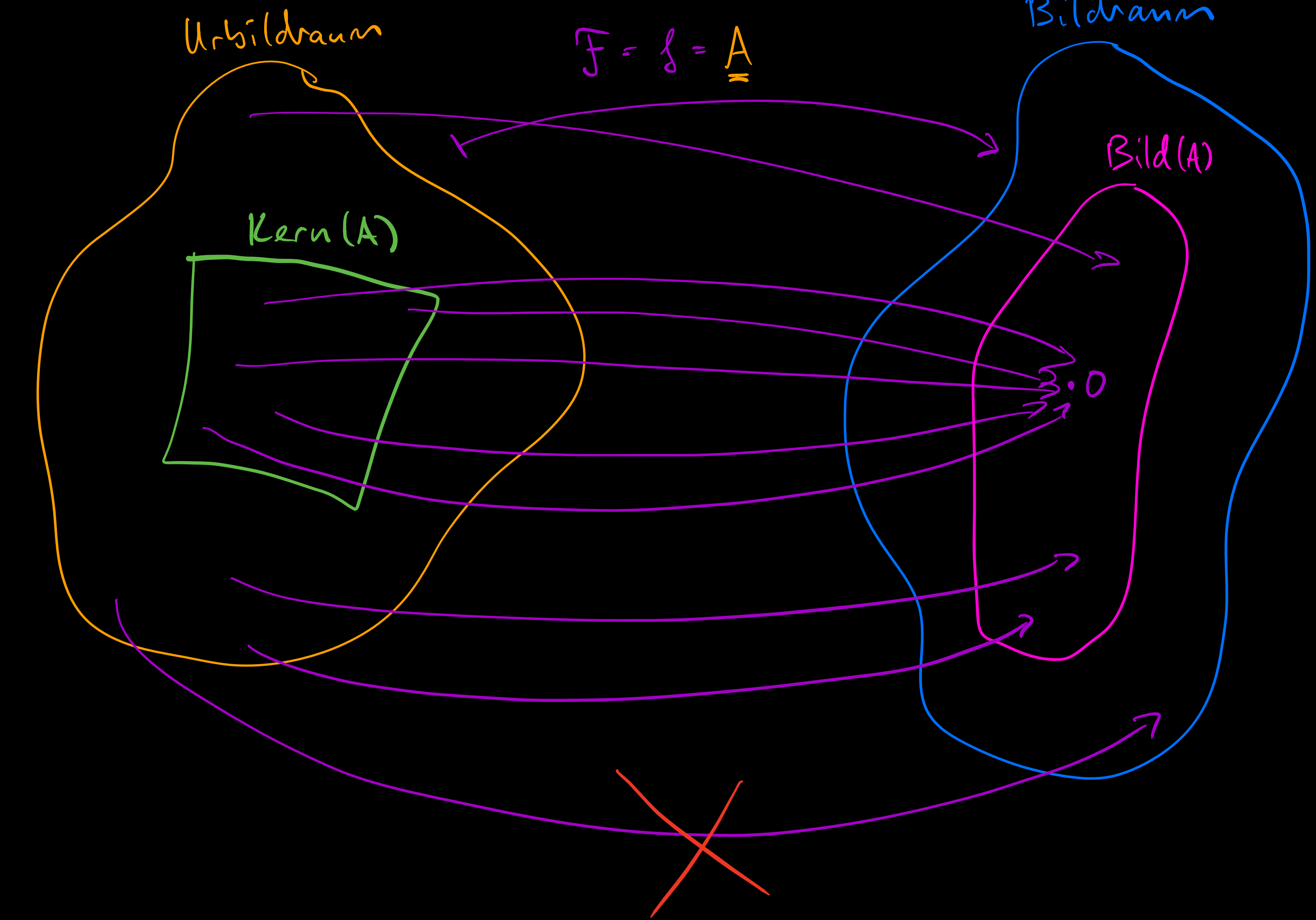
$\Rightarrow$ lin. abhängig von $\sin(x)$ & $\cos(x)$

Frage: $\mathcal{B} = \{ b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x,\ b^{(3)} = 3x^2 - 1 \}$ eine Basis vom $\mathcal{P}_2$?

$\rightarrow$ Standardbasis darstellbar?

$$\left.\begin{aligned} 1 &= b^{(1)} = 1 \\ x &= b^{(2)} = x \\ x^2 &= \tfrac{1}{3} b^{(3)} + \tfrac{1}{3} b^{(1)} = x^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = x^2 \end{aligned}\right\}$$ $\mathcal{B}$ ist eine Basis!

Kern & Bild linearer Abbildungen:



Eigenschaften von Kern & Bild:

Sei A eine $m \times n$ - Matrix : $A = m \overset{n}{\begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix} = b$$

i) $b \in \mathrm{Im}(A) \iff \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ ist lösbar

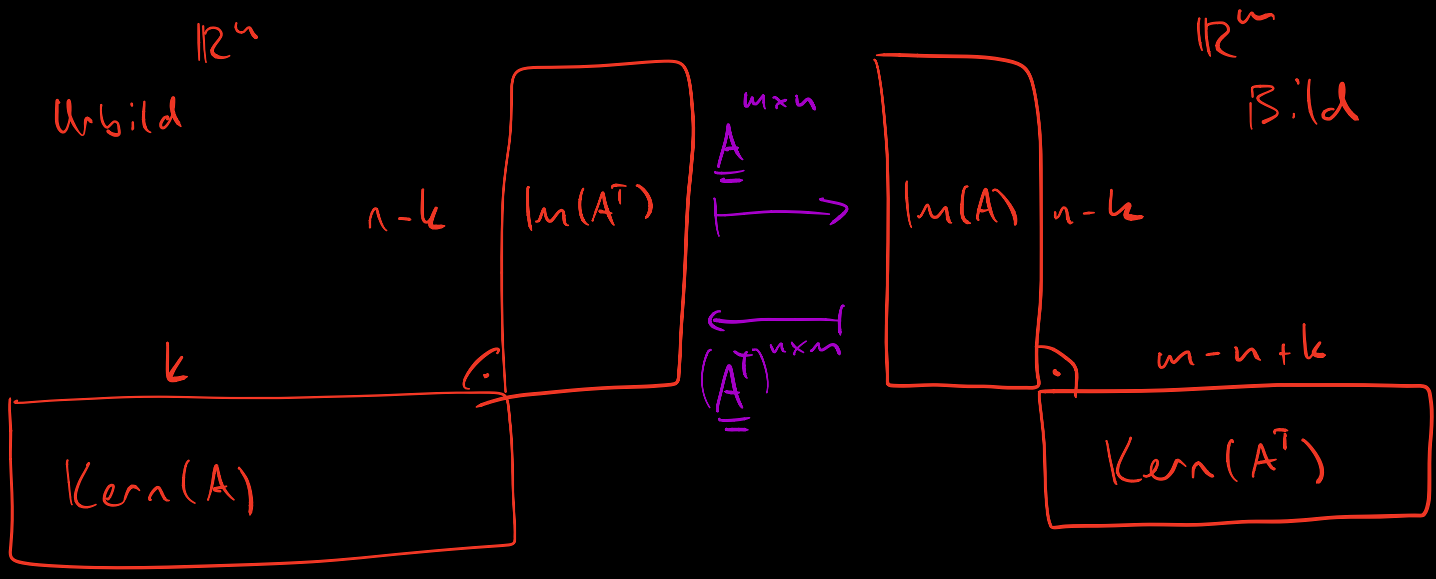
ii) $x \in \mathrm{Kern}(A) \iff x$ eine Lösung zum HLGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

iii) $\mathrm{Kern}(A)$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^n$

iv) $\mathrm{Im}(A)$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^m$

v) $\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$

vi) $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A^T))$



"Fundamentalsatz der linearen Algebra"

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{b} \perp (A^T x = 0)$

Bild(A) $\Leftrightarrow$ Spaltenraum

Bild(A^T) $\Leftrightarrow$ Zeilenraum

Beispiele: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto x_1 - x_2$

Bestimme Kern & Bild von $\underline{\underline{A}} = [1 \ \ -1]$

Kern: Lösungsmenge von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\}}}$

Oder rigoroser: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0 \Leftrightarrow \quad 1 \ \ -1 \mid 0$ $\quad x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_1 = t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{Kern}(A) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}}}$

Bild: $\mathrm{Im}(F) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kern: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

$x_4 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = \frac{3}{2}(t-s)$

$x_1 = \frac{1}{4}s - \frac{3}{4}t$

$$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}s - \frac{3}{4}t \\ \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}s \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \underline{s,t \in \mathbb{R}} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Basisvektoren vom Kern(A)

Bild: $\underline{\underline{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$

Basis des Bild(A)

Lin. unabh. Spalten von $\underline{\underline{A}}$?

Allgemeine Lösung eines LGS / DGL:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \iff \underline{x}^P$ partikuläre Lsg.

$$\underline{x} = \underline{x}^P + \alpha \underline{x}^{h1} + \beta \underline{x}^{h2}$$ allgemeine Lösung

homogene Lösungen von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0 \iff \text{Kern}(A) = \text{span}\{\underline{x}^{h1}, \underline{x}^{h2}\}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}(\underline{x}^P + \alpha \underline{x}^{h1} + \beta \underline{x}^{h2}) = \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^P}_{b} + \underbrace{\alpha \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{h1} + \beta \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{h2}}_{=0}$$

$= b$

Urbild